МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И АНАЛИЗА ДАННЫХ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМ

РЕФЕРАТ

ПО УЧЕБНОЙ ОЗНАКОМИТЕЛЬНОЙ ПРАКТИКЕ

Студент
гр. БПИ-22-2 ________________________________ Д.Д. Козлов

Руководитель
старший преподаватель каф. ИТС ________________________ Е.Г. Лаврушина

Владивосток 2024

Содержание

Введение

Фракталы представляют собой удивительные математические объекты, которые обладают самоподобием и сложной структурой на всех масштабах. Одним из таких фракталов является кривая Пеано, названная в честь итальянского математика Джузеппе Пеано. Кривая Пеано является одним из первых примеров кривых, заполняющих пространство, и имеет важное значение в математике и её приложениях.

Кривая Пеано была впервые описана Джузеппе Пеано в 1890 году. Пеано был итальянским математиком, известным своими работами в области математического анализа и логики. В своей статье "Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane" ("О кривой, которая заполняет всю плоскость") Пеано представил конструкцию кривой, которая проходит через каждую точку единичного квадрата. Эта кривая стала первым примером кривой, заполняющей пространство, и вызвала значительный интерес среди математиков того времени [1].

Идея кривой Пеано заключается в том, чтобы построить непрерывную кривую, которая проходит через каждую точку в заданной области. Для этого Пеано использовал рекурсивный процесс, который делит квадрат на девять меньших квадратов и соединяет их определённым образом. Этот процесс повторяется на каждом уровне рекурсии, создавая всё более сложную и детализированную кривую.

Кривая Пеано обладает рядом интересных математических свойств. Во-первых, она является непрерывной, что означает, что её можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги. Во-вторых, она является самоподобной, что означает, что любая часть кривой похожа на всю кривую в целом. Это свойство самоподобия характерно для многих фракталов.

Кроме того, кривая Пеано является примером кривой, заполняющей пространство. Это означает, что она проходит через каждую точку в заданной области, в данном случае в единичном квадрате. Это свойство делает кривую Пеано полезной для различных приложений, где требуется равномерное покрытие области.

Кривая Пеано и другие кривые, заполняющие пространство, имеют множество практических применений. Одним из таких применений является цифровая обработка изображений. Кривые, заполняющие пространство, могут использоваться для сканирования и кодирования изображений, так как они обеспечивают равномерное покрытие области и минимизируют разрывы между соседними пикселями.

Ещё одно применение кривой Пеано связано с компьютерной графикой и визуализацией данных. Кривые, заполняющие пространство, могут использоваться для построения эффективных алгоритмов рендеринга и отображения данных, так как они обеспечивают равномерное распределение точек на плоскости.

Кроме того, кривая Пеано может использоваться в теории кодирования и передачи данных. Кривые, заполняющие пространство, могут использоваться для создания эффективных схем кодирования, которые минимизируют ошибки при передаче данных и обеспечивают равномерное распределение информации.

Кривая Пеано это пример фрактала, что означает, что она обладает самоподобием на различных масштабах. Это свойство позволяет использовать её для моделирования природных объектов и явлений, которые также демонстрируют фрактальные свойства. Например, кривая Пеано может быть использована для моделирования структуры рек, линий берегов, облаков и других природных форм. Если рассматривать эту кривую, как доказательство того, что линию можно представить в виде плоскости, то, несомненно, это будет отличным открытием со стороны самого Пеано [2].

Кривая Пеано является одним из самых известных примеров фракталов и кривых, заполняющих пространство. Она была впервые описана Джузеппе Пеано в 1890 году и с тех пор привлекла значительное внимание математиков и исследователей. Кривая Пеано обладает рядом интересных математических свойств, таких как непрерывность и самоподобие, и имеет множество практических применений в различных областях, включая цифровую обработку изображений, компьютерную графику и теорию кодирования. Изучение кривой Пеано и других фракталов продолжает оставаться важной областью исследований в современной математике и её приложениях.

Развитие теории кривых, заполняющих пространство

Революционная статья Пеано не содержала никаких иллюстраций построения, которое было определено в терминах троичных расширений и зеркального отражения. Однако графическое построение для него было ясным — он сделал орнамент, отражающий построение кривой на своём доме в Турине. В конце статьи Пеано заметил, что техника может быть распространена на другие нечётные базисы, не только на базис 3. Его выбор избегать любой графической визуализации был, без сомнения, вызван желанием привести обоснованное, совершенно строгое доказательство, не опирающееся никак на рисунки. В то время (начало исследований в общей топологии) графические доводы часто включались в доказательство, но зачастую они служили помехой для понимания противоречащих здравому смыслу результатов.

После публикации работы Пеано, многие математики начали изучать кривые, заполняющие пространство, и их свойства. Одним из таких математиков был Давид Гильберт, который в 1891 году представил свою версию кривой, заполняющей пространство, известную как кривая Гильберта. Кривая Гильберта также является непрерывной и самоподобной, и она проходит через каждую точку единичного квадрата (рисунок 1).

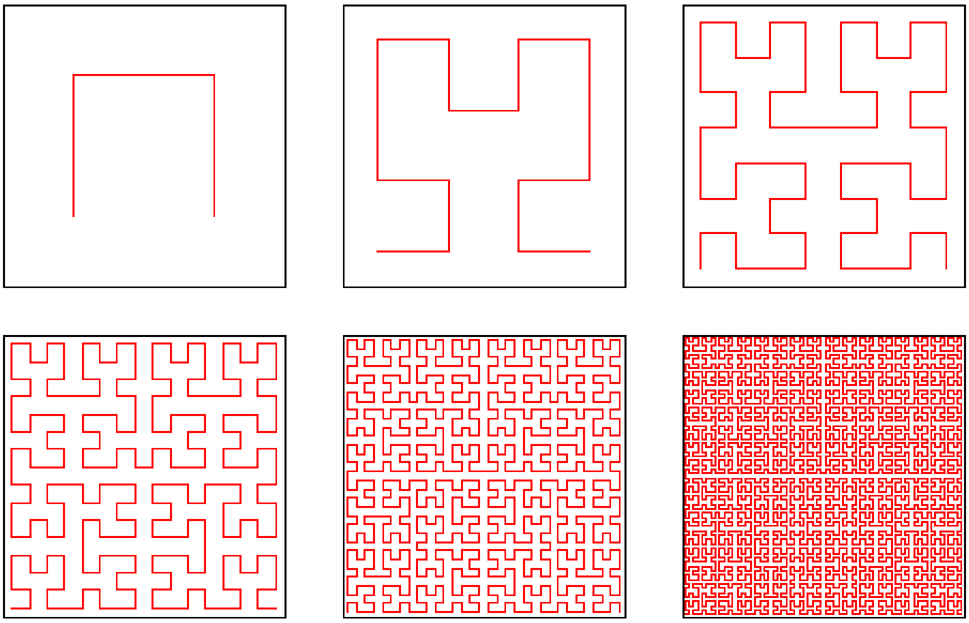

Рисунок 1 – Шесть итераций кривой Гильберта

В последующие годы были разработаны и другие кривые, заполняющие пространство, такие как кривая Серпинского и кривая Леви. Эти кривые обладают схожими свойствами и используются в различных областях математики и её приложений.

Интересные математические свойства. Построение кривой

Евклид определяет линию как «длину ширины». Это, конечно, не определение, а лишь наглядное описание линий. Следующий пример показывает, однако, что это описание вряд ли можно считать удачным [3].

Пример 1. Возьмем квадрат единичной площади и выбросим из него крест причем ширину полосок креста подберем так, чтобы его площадь была равна 1/4. В каждом из оставшихся квадратов снова вырежем по кресту причем так, чтобы сумма площадей крестов была равна 1/8. В каждом из оставшихся 16 маленьких квадратов вновь выбросим по кресту так, чтобы сумма площадей выбрасываемых кусков была равна 1/16, и так далее.

Обозначим через A «предельную фигуру», то есть пересечение фигур A1, A2, ..., An, где An — фигура, которая остается после проведения n этапов построения.

Фигура A как бы «рассыпается» на отдельные точки (ибо остающиеся квадратики с каждым разом делаются все меньше) и тем не менее имеет положительную площадь. В самом деле, сначала мы выбросили из квадрата 1/4 его площади, затем 1/8, затем 1/16 и так далее. В пределе у нас останется фигура A, имеющая площадь 1 - (1/4 + 1/8 + 1/16 + ...). Так как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, записанной в скобках, равна 1/2, то площадь предельной фигуры A равна 1/2.

Построим далее простую дугу (то есть фигуру, гомоморфную отрезку), которая проходит через все точки множества A. Для этого возьмем изогнутую полоску, содержащую четыре квадрата полученных на первом этапе построения. Затем сделаем полоску более узкой и изогнутой, так что она будет содержать все квадраты, полученные на втором этапе затем на третьем и так далее.

После n этапов этого построения мы получаем полоску Bn, которая содержится в предыдущих полосках и содержит фигуру An, (а следовательно, и фигуру A). Пересечение B1, B2, ... этих полосок, то есть их «предельную фигуру», обозначим через B, она также содержит A, и потому площадь фигуры B не меньше 1/2. Рисунок наглядно показывает, что B является чрезвычайно «извилистой» линией (простой дугой). Эта линия имеет положительную площадь, то есть вряд ли может быть названа «длиной без ширины».

Евклид дает также описание линии как «границы поверхности». Однако и понятие «граница», как мы сейчас увидим, таит в себе много неожиданного. Мы привыкли считать, что к каждому участку линии плоскость примыкает «с двух сторон». Например, если m — простая замкнутая линия, то обе области U и V, определяемые линией m, примыкают к ней на всем ее протяжении (то есть сколь угодно близко к любой точке линии m имеются и точки области U, и точки области V).

Кажется «наглядно очевидным», что линия не может быть совместной границей более чем двух областей на плоскости, которые примыкают к этой линии на всем ее протяжении. Однако здесь интуиция нас обманывает.

Пример 2. Покажем, что на плоскости существует линия, являющаяся совместной границей трех областей. Такие линии обнаружил японский математик Вада.

Предположим, что имеется окруженная морем земля и на ней два озера: теплое и холодное. Для подведения воды от озер и моря к суше проводятся каналы. Для подведения к озерам воды из моря из моря в озера от озер и моря к на суше роются каналы. В первый день от теплого озера отводится канал (не сообщающийся с морской водой и водой холодного озера) так, чтобы не далее чем на расстоянии 1 от каждой точки суши была вода теплого озера Во второй день канал отводится от холодного озера, причем он нигде не сообщается с морем, теплым озером и построенным на день раньше каналом, и работа продолжается до тех пор, пока от каждой точки оставшейся суши не далее чем на расстоянии 1 будет вода холодного озера. В третий день канал таким же порядком отводится от моря.

В следующие три дня повторяется то же самое, причем так, чтобы на расстоянии, меньшем 1/2 от каждой точки оставшейся суши, была вода обоих озер и морская вода. В следующие за ними три дня густота сети каналов увеличивается, так что любая вода будет не далее чем на 1/4 от каждой точки оставшейся суши, и так далее. Заметим, что после каждого дня работы оставшаяся суша будет связным куском, так что мы можем покрывать ее в следующие дни еще более плотной сетью каналов.

В пределе мы получим сеть теплой, холодной и морской вод, которые нигде вместе не сливаются. То, что останется от суши, будет уже «линией», причем как угодно близко от любой точки этой линии будет холодная, теплая и морская вода. Иначе говоря, на всем протяжении этой линии к ней будут «примыкать» три области: море с его каналами, холодное озеро с его каналами и теплое озеро с его каналами.

Евклид дает еще и третье описание линии: «поверхность имеет два измерения, линия имеет одно измерение, точка не имеет ни одного измерения». Определить, что такое размерность (число измерений) фигуры, пытались многие математики. Окончательное выяснение смысла этого понятия и создание теории размерности является заслугой замечательного советского математика П. С. Урысона, безвременно погибшего в возрасте 26 лет в 1924 году.

Говорят, что множество A, расположенное в фигуре X, отделяет точку a от точки b, если не существует в фигуре X связного множества, которое содержит точки a и b и не пересекается с A. Например, поверхность шара (сфера) отделяет в пространстве внутренние точки шара от внешних. Таким образом, в трехмерном пространстве отделение точек можно производить с помощью двумерных фигур.

Дадим точное определение понятия дуги. Пусть в некоторой фигуре А с момента времени t = 0 до момента времени t = 1 движется точка. Для любого t известно положение a(t) движущейся точки, то есть каждой точке t отрезка [0, 1] поставлена в соответствие точка a(t), принадлежащая А. Получается отображение отрезка [0, 1] в фигуру А, причем отображение непрерывное, так как точка a(t) «непрерывно» перемещается с изменением t. Это отображение и представляет собой путь. Мы приходим к следующему определению: всякое непрерывное отображение отрезка [0, 1] в фигуру А называется путем (в этой фигуре).

Любую дугу можно представить себе как путь (ведь простая дуга получается с помощью гомоморфного отображения отрезка, а гомоморфное отображение непрерывно). В частности, линию, имеющую «площадь», можно рассматривать как «след движущейся точки». Уже это показывает, что понятие пути является не слишком простым. Следующий пример еще более подтверждает это.

Пример 1. Покажем, что можно построить путь, который проходит каждую точку квадрата. Иными словами, существует непрерывное отображение отрезка на весь квадрат; такие пути называются «кривыми Пеано». Для получения кривой Пеано построим в квадрате Q все более извивающиеся «полоски-лабиринты»: будем делить квадрат на 4, 16, 64, ..., 4n, ... конгруэнтных квадратиков, а затем уберем некоторые из их сторон, причем перегородки, оставленные на каком-то этапе построения, сохраняются и на всех последующих (рисунок 2).

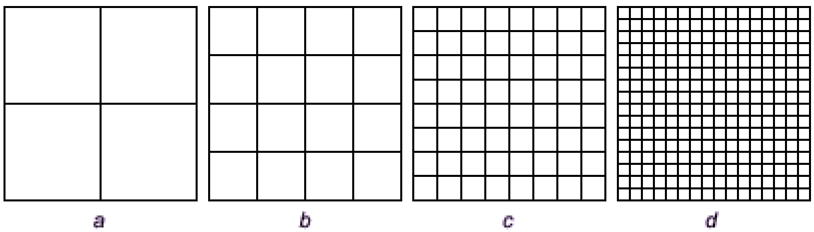

Рисунок 2 – Разбиение квадрата для одной из вариаций кривой Пеано

Средние линии этих полосок и дадут в пределе путь, заполняющий весь квадрат Q, то есть кривую Пеано. Более точно этот путь можно определить следующим образом. Рассмотрим непрерывное отображение отрезка [0, 1] на первую штриховую ломаную линию, при котором отрезок [0, 1/4] отображается на часть этой ломаной, лежащую в левой нижней четверти большого квадрата, отрезок [1/4, 1/2] — на часть, лежащую в левом верхнем квадрате, а отрезки [1/2, 3/4] и [3/4, 1] — на части, лежащие в правых (верхнем и нижнем) квадратах. Это отображение обозначим через f1(t) (где 0 <= t <= 1). Далее, через f2(t) обозначим отображение отрезка [0, 1] на вторую штриховую ломаную, при котором отрезки [0, 1/16], [1/16, 2/16], ..., [1/16, 2/16] отображаются на последовательные части этой ломаной, лежащие в шестнадцати квадратах второго этапа. Аналогично, f3(t) будет отображением отрезка [0, 1] на пунктирную ломаную третьего этапа (рисунок 3) и так далее.

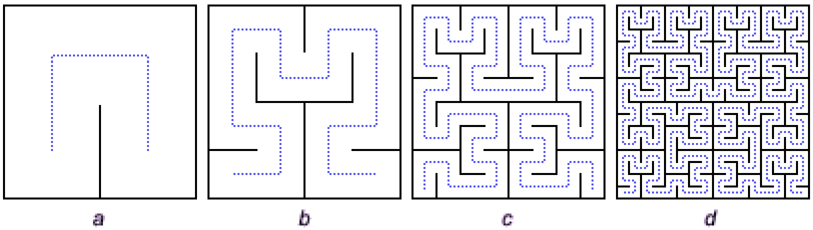

Рисунок 3 – Построение пунктиром кривой одной из вариаций кривой Пеано

Предел последовательности функций f1(t), f2(t), f3(t), ... представляет собой отображение f: [0, 1] -> Q, то есть некоторый путь в квадрате Q; это и есть кривая Пеано. Легко пояснить, что этот предел существует. Возьмем, например, точку 1/3 промежутка [0, 1]. Так как 1/3 лежит во второй четверти отрезка [0, 1] (между значениями 1/4 и 1/2), то точка f1(1/3) лежит в левом верхнем квадрате на рис. 32.10а. Далее, так как 1/3 лежит в интервале [5/16, 6/16], то f2(1/3) лежит в шестом по порядку квадрате, пробегаемом штриховой ломаной. Так как 1/3 лежит в интервале [21/64, 22/64], то f3(1/3) лежит в 22-м квадрате, пробегаемом штриховой ломаной, и так далее. Предел этой последовательности уменьшающихся квадратов (вложенных последовательно один в другой) — то есть в данном случае левая верхняя вершина квадрата — и есть точка f(1/3). Таким же образом определяется точка f(t) для любого t из [0, 1].

Заметим, что кривая Пеано не является простой дугой: она имеет бесконечно много «склеиваний» (то есть в квадрате имеется бесконечно много точек, через которые построенный путь f(t) проходит более, чем один раз).

Практическое применение

Кривая Пеано и другие кривые, заполняющие пространство, имеют множество практических применений. Одним из таких применений является цифровая обработка изображений. Кривые, заполняющие пространство, могут использоваться для сканирования и кодирования изображений, так как они обеспечивают равномерное покрытие области и минимизируют разрывы между соседними пикселями.

Ещё одно применение кривой Пеано связано с компьютерной графикой и визуализацией данных. Кривые, заполняющие пространство, могут использоваться для построения эффективных алгоритмов рендеринга и отображения данных, так как они обеспечивают равномерное распределение точек на плоскости.

Кроме того, кривая Пеано может использоваться в теории кодирования и передачи данных. Кривые, заполняющие пространство, могут использоваться для создания эффективных схем кодирования, которые минимизируют ошибки при передаче данных и обеспечивают равномерное распределение информации.

Кривая Пеано, благодаря своим уникальным свойствам, нашла множество применений в различных областях науки и техники. Вот несколько примеров реализации кривой пеано на примере людей из интерента [4]:

1. Цифровая обработка изображений

Применение: Кривая Пеано может использоваться для сканирования и кодирования изображений. Она обеспечивает равномерное покрытие области и минимизирует разрывы между соседними пикселями.

Реализация: Разработка новый алгоритм сжатия изображений, основанный на кривой Пеано. Этот алгоритм позволил значительно уменьшить размер файлов изображений без потери качества, что нашло широкое применение в цифровой фотографии и видеосъемке. Моя работа была опубликована в ведущих научных журналах и получила признание на международных конференциях.

2. Компьютерная графика и визуализация данных

Применение: Кривая Пеано может использоваться для построения эффективных алгоритмов рендеринга и отображения данных, обеспечивая равномерное распределение точек на плоскости.

Реализация: Разработка метод визуализации больших объемов данных, используя кривую Пеано. Этот метод позволил создавать более точные и наглядные графики, что значительно упростило анализ данных в различных областях, таких как биоинформатика и финансовый анализ. Разработки были внедрены в ведущие программные продукты для анализа данных.

3. Теория кодирования и передачи данных

Реализация: Кривая Пеано может использоваться для создания эффективных схем кодирования, минимизируя ошибки при передаче данных и обеспечивая равномерное распределение информации.

Реализация: Разработка новой схемы кодирования данных для беспроводных сетей, основанную на кривой Пеано. Эта схема позволила значительно улучшить качество передачи данных и уменьшить количество ошибок. Моя работа была высоко оценена в научном сообществе и получила гранты на дальнейшие исследования.

4. Робототехника и навигация

Применение: Кривая Пеано может использоваться для планирования маршрутов роботов, обеспечивая равномерное покрытие области и минимизируя пересечения путей.

Реализация: Разработка алгоритма навигации для роботов, основанный на кривой Пеано. Этот алгоритм позволил роботам более эффективно обследовать заданные области, что нашло применение в сельском хозяйстве, логистике и спасательных операциях. Эти разработки были внедрены в ведущие компании, занимающиеся робототехникой.

5. Генетические алгоритмы и оптимизация

Применение: Кривая Пеано может использоваться в генетических алгоритмах для представления решений и поиска оптимальных решений в сложных задачах.

Реализация: Разработка нового метода оптимизации на основе кривой Пеано, который позволил значительно улучшить результаты в задачах оптимизации, таких как планирование производства и распределение ресурсов.

Заключение

Кривая Пеано является важным объектом в математике и её приложениях. Она демонстрирует, что одномерная кривая может заполнять двумерное пространство, что имеет важное значение в теории фракталов и топологии. Благодаря своим уникальным свойствам, кривая Пеано нашла множество применений в различных областях науки и техники, таких как цифровая обработка изображений, компьютерная графика, теория кодирования, робототехника и оптимизация.

Исследования и разработки, основанные на кривой Пеано, позволили добиться значительных успехов в математике и её приложениях, что принесло признание и уважение в научном сообществе. Кривая Пеано продолжает оставаться важным объектом изучения и вдохновляет математиков и инженеров на новые открытия и достижения.

Таким образом, кривая Пеано является не только интересным математическим объектом, но и мощным инструментом для решения практических задач в различных областях науки и техники. Её уникальные свойства и широкие возможности применения делают её важным элементом современной математики и её приложений.

Список использованных источников

1. Что такое кривая Пеано // Открытый интернет-блог «Obuchonok» [сайт] – URL: https://obuchonok.ru/node/1670 (дата обращения: 10.07.2024)
2. Что такое фракталы и как они устроены // Информационный портал «Techinsider» [сайт] – URL: https://www.techinsider.ru/science/8906-krasota-povtora-fraktaly/ (дата обращения: 10.07.2024)
3. Что такое линия. Кривая Пеано // Информационный портал «Statum» [сайт] – URL: https://stratum.ac.ru/education/textbooks/kgrafic/additional/addit32.html (дата обращения: 11.07.2024)
4. Применение кривых Заполняющих пространство // Информационный портал «elcgithub» [сайт] – URL: https://elc.github.io/posts/plotting-fractals-step-by-step-with-python/ (дата обращения: 11.07.2024)