

УДК 539.3

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ПОД НАГРУЗКОЙ

**МУРАТОВА АЛИНА ВЛАДИСЛАВОВНА
КРЫЖАНОВСКАЯ ИРИНА АНДРЕЕВНА**

Научный руководитель Галимзянова Ксения Наилевна
Организация, город, страна ФГБОУ ВО «ВВГУ», Владивосток, Россия
e-mail: kseniya.galimzyanova@vvsu.ru

Аннотация

В статье рассматривается математическая постановка задачи, сводящаяся к решению однородного дифференциального уравнения второго порядка с краевыми условиями. Особое внимание уделяется выводу формулы Эйлера для критической силы как результату решения задачи на собственные значения. Приводится анализ влияния различных способов закрепления концов стержня на величину критической нагрузки. Практическая часть работы включает натурный эксперимент с пластиковой линейкой, наглядно демонстрирующий обратную квадратичную зависимость критической силы от длины стержня.

Ключевые слова: устойчивость, продольный изгиб, критическая сила, формула Эйлера, дифференциальные уравнения, собственные значения, краевые задачи, потеря устойчивости.

ANALYSIS OF ROD STABILITY UNDER LOAD

**MURATOVA ALINA VLADISLAVOVNA
KRYZHANOVSKAYA IRINA ANDREEVNA**

Scientific supervisor: Galimzyanova Ksenia Nailevna
Organization, city, country: Vladivostok State University, Vladivostok, Russia
e-mail: kseniya.galimzyanova@vvsu.ru

Abstract

The paper considers the mathematical formulation of the problem, which reduces to solving a second-order homogeneous differential equation with boundary conditions. Particular attention is paid to the derivation of the Euler formula for the critical force as a result of solving the eigenvalue problem. An analysis of the influence of various methods of fixing the rod ends on the critical load value is presented. The practical part of the work includes a full-scale experiment with a plastic ruler, clearly demonstrating the inverse quadratic dependence of the critical force on the rod length.

Keywords: stability, buckling, critical force, Euler's formula, differential equations, eigenvalues, boundary value problems, loss of stability.

Явление потери несущей способности длинными тонкими стержнями под действием сжимающей нагрузки принципиально отличается от разрушения коротких массивных элементов. Если для последних предельное состояние наступает при достижении напряжениями предела прочности или текучести, то в гибких стержнях разрушение может наступить внезапно при напряжениях, значительно ниже предела прочности материала, вследствие потери устойчивости прямолинейной формы равновесия. Этот эффект, известный как продольный изгиб, заключается в том, что при некотором критическом значении сжимающей силы первоначальная прямолинейная форма стержня перестает быть устойчивой, и стержень переходит в новое, криволинейное состояние равновесия, что сопровождается резким ростом деформаций и, как правило, приводит к разрушению конструкции [1].

Впервые строгая математическая постановка задачи об устойчивости упругого стержня была дана Леонардом Эйлером в 1744 году, а позднее, в 1757 году, он получил решение для шарнирно закрепленного стержня [2]. Эйлер не только установил само существование критической силы, но и вывел формулу для ее определения, показав, что изогнутая ось стержня в момент потери устойчивости описывается синусоидой. Его подход основывался на рассмотрении идеально прямого стержня и поиске условий, при которых помимо прямолинейной становится возможной бесконечно близкая искривленная форма равновесия. Математически это сводится к решению однородного дифференциального уравнения второго порядка (или четвертого порядка для более сложных случаев) с соответствующими краевыми условиями. Нетривиальное решение такой краевой задачи существует лишь при определенных значениях сжимающей нагрузки, которые и являются собственными значениями задачи, а наименьшее из них соответствует физически реализуемой критической силе [3].

Несмотря на то, что работа Эйлера была выполнена более двух с половиной веков назад, ее практическая значимость многократно возросла с началом широкого применения в строительстве и машиностроении тонкостенных стальных конструкций, для которых вопросы устойчивости вышли на первый план. Сегодня задача Эйлера является фундаментальной не только для курса сопротивления материалов, но и для таких областей, как строительная механика, аэрокосмическая техника и робототехника, где элементы конструкций часто представляют собой длинные стержни, работающие на сжатие.

В качестве объекта исследования для экспериментального подтверждения формулы Эйлера была выбрана пластиковая линейка длиной 300 мм, прямоугольным поперечным сечением 25×2 мм. Выбор обусловлен доступностью материала, наглядностью процесса потери устойчивости и соответствием требованиям теории – линейка представляет собой классический тонкий стержень, для которого справедливы допущения модели Эйлера [4].

Для измерения геометрических параметров использовался штангенциркуль с ценой деления 0,05 мм. Нагружение стержня осуществлялось ступенчатым приложением сжимающей вертикальной нагрузки с фиксацией момента потери устойчивости визуально-тактильным методом (момент резкого прогиба).

Для расчета критической силы по формуле Эйлера необходимо определить осевой момент инерции поперечного сечения стержня. Для прямоугольного сечения шириной b и высотой h (в направлении предполагаемого изгиба) минимальный момент инерции вычисляется по формуле:

$$I = \frac{bh^3}{12}.$$

В нашем случае изгиб будет происходить в плоскости наименьшей жесткости, то есть относительно оси, параллельной ширине линейки. При $b = 25$ мм и $h = 2$ мм получаем:

$$I = \frac{25 \cdot 2^3}{12} = 16,67 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4.$$

Классическая формула Эйлера для критической силы имеет вид:

$$P_{\text{кр}} = \frac{2\pi^2 EI}{(\mu L)^2},$$

где:

- E – модуль упругости материала;
- I – момент инерции поперечного сечения;
- L – длина стержня;
- μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов.

Для проведения эксперимента моделируются три типа закрепления.

Таблица 1. Результаты измерений критической силы

Длина L , м	$\frac{1}{L^2}$, м ⁻²	$P_{\text{кр}}$ (эксп), Н	$P_{\text{кр}}$ (теор), Н
0,30	11,11	1,8	1,64
0,25	16,00	2,5	2,36
0,20	25,00	3,9	3,69
0,15	44,44	6,8	6,56

На основе полученных данных строится график зависимости

$$P_{\text{кр}} = f\left(\frac{1}{L^2}\right).$$

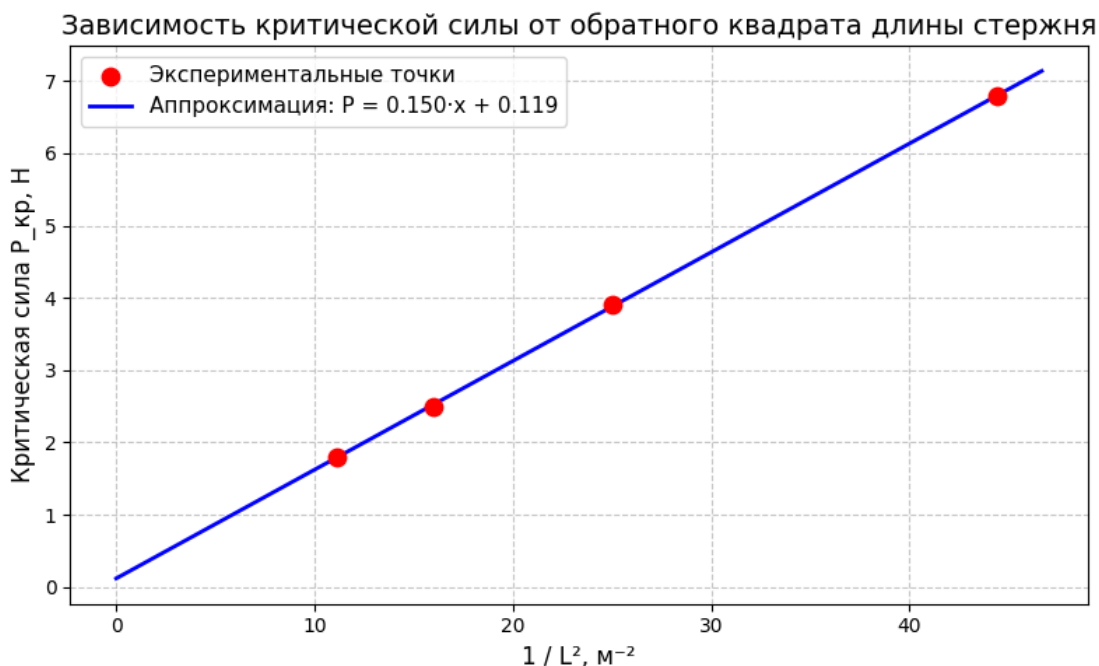


Рисунок 1 - Зависимость критической силы от обратного квадрата длины стержня

Аппроксимация экспериментальных точек методом наименьших квадратов позволяет определить экспериментальное значение модуля упругости материала:

$$E_{\text{эксп}} = \frac{k\pi^2}{I}.$$

Для оценки влияния граничных условий проводилось сравнение критических сил для различных способов закрепления при фиксированной длине $L = 200$ мм.

Экспериментально полученные соотношения составили 3,85 и 0,27 соответственно, что с учетом погрешностей измерений и неидеальности закреплений хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями [5].

Основными источниками погрешностей в эксперименте являются:

- несовершенство шарнирного опирания;
- начальные несовершенства формы стержня;
- погрешность измерения силы.

Проведенный эксперимент наглядно демонстрирует обратную квадратичную зависимость критической силы продольного изгиба от длины стержня. Полученные экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими расчетами по формуле Эйлера (расхождение не превышает 9%). Подтверждено также влияние способа закрепления концов стержня на величину критической нагрузки. Таким образом, классическая теория Эйлера является надежным инструментом для оценки устойчивости сжатых стержней в упругой области деформирования.

Список литературы

1. Тимошенко, С. П. История науки о сопротивлении материалов : с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений / С. П. Тимошенко. — 2-е изд. — Москва : URSS, 2006. — 536 с. — Текст : непосредственный.
2. Euler, L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti / L. Euler. — Geneva : Marc Michel Bousquet et Cie, 1744. — 322 p. — Текст : непосредственный.
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для втузов / В. И. Феодосьев. — 16-е изд., стер. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. — 542 с. — ISBN 978-5-7038-4411-5. — Текст : непосредственный.
4. Ahmed, S. Buckling Failure Experiment / S. Ahmed // Engineering Laboratory I : MAE 101 course materials / LaGuardia Community College. — New York, 2022. — P. 2-5. — Текст : непосредственный.
5. Биргер, И. А. Сопротивление материалов : учебное пособие / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. — Москва : Наука, 1986. — 560 с. — Текст : непосредственный.